Prof. Eduardo García Varillas

eduardo_garcia@my.unitec.edu.mx
edel0@hotmail.com

http://eqndiferenciales.wikispaces.com

1

jueves, 16 de febrero de 2012

Requisitos:
1. Identidades Trigonométricas.
2. Derivadas Algebraicas y Trigonométricas.
3. Métodos de integración.

2

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

$F(x) = 3x^2+4$ → derivada diferencial

$f'(x) = 6x$

Anti derivada ($\int$)

$6\,\frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{6}{2}x^2$

$\boxed{F(x) = 3x^2 + C}$

Hallar la antiderivada.

a) Sen (5x)

$F(x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

Comprobación

$f'(x) = -\frac{1}{5}(-\operatorname{Sen} 5x)(5) = \operatorname{Sen}(5x)$

$F(x) = \cos 5x$

$f'(x) = -\operatorname{Sen}(5x)\cdot(5)$

3

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

b) e^{3x^2}

$F(x) = \frac{e^{3x^2}}{6x} + c$

$\int e^{3x^2}\,dx = e^{3x^2}$

$\frac{d}{dx}(e^u) = e^{3x^2}(6x)$

$\int e^u\,du = e^u$

$\int e^u\,du = \frac{1}{du}\cdot e^u + c$

c) $\int (3x^2+4)^2\,(3x)\,dx$

$u = 3x^2+4$

$\frac{6x}{2}$

$\int U^n \; dU$

$\int U^n \frac{dU}{2} = \frac{1}{2}\frac{U^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{(3x^2+4)^3}{3} = \frac{1}{6}(3x^2+4)^3 + c$

4

d) $\int x^3 \operatorname{Sen} x \; dx$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u \longrightarrow du$

$dv \longrightarrow v$

	Algebraica	Trigonometrica
	dx	$\int$
$+$	x^3	$\operatorname{Sen} x$
$-$	$3x^2$	$-\operatorname{Cos} x$
$+$	$6x$	$-\operatorname{Sen} x$
$-$	6	$\operatorname{Cos} x$
$+$	0	$\operatorname{Sen} x$

$-x^3 \operatorname{Cos} x + 3x^2 \operatorname{Sen} x + 6x \operatorname{Cos} x - 6 \operatorname{Sen} x + C$

e) $\int \operatorname{Ln}|x| \operatorname{Sen} x \; dx$

$\int \operatorname{Ln}|x| \operatorname{Sen} x \, dx = \frac{1}{x} \operatorname{Cos} x - \int \operatorname{Ln}|x| \operatorname{Sen} x \, dx$

$2 \int \operatorname{Ln}|x| \operatorname{Sen} x \, dx = \frac{1}{x} \operatorname{Cos} x$

$= \frac{1}{2x} \operatorname{Cos} x + C$

f) $\int 5x^3 e^{x^4} dx = \longrightarrow \frac{5}{4} e^{x^4} + C$

$\downarrow$ $15x^2$

$\rightarrow 4x^3 e^{x^4}$

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

9) $\int \frac{x^3+2x+1}{x(x^2-1)}\,dx \Rightarrow$ Fracciones Parciales $\int \bigcirc + \int \bigcirc = \ln|\ |$

$\frac{1}{4}+\frac{3}{7} = \frac{7+12}{(7)(4)} = \frac{19}{28}$ $\qquad \frac{15}{21} = \_ \pm \_$

$\frac{x^3+2x+1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-1}$

$A(x^2-1) + (Bx+C)x = Ax^2 - A + Bx^2 + Cx$

Agrupar

$x^2 \quad A+B=0 \qquad B=1$

$x \quad C=2$

$TI \quad -A=1$

$A=-1$

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

$\int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx$

$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx + \int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

$u=x^2-1$

$du=2x\,dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$2\int \frac{dx}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{du}{u^2-a^2}$

$u=x$

$a=1$

$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + 2\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right] + C$

CAPÍTULO

2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria en la que la variable dependiente no aparece explícitamente es **autónoma.**

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{1 + y^2}_{f(y)} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \underbrace{0.2xy}_{f(x,\,y)}$$

UNITEC

Variables separables

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)}$$

es separable o que tiene variables separables.

1. dy y $dx \Rightarrow$ Numeradores
2. Tratar despejar "y"
3. Todas las constantes de integración se van con la variable indep "x"

$$\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx \quad \text{o} \quad H(y) = G(x) + c,$$

Ejemplos

$(1+x)\,dy - y\,dx = 0$

$(1+x)\,dy = y\,dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$

$\ln|y| + c = \ln|1+x| + c$

$\ln|y| = \ln|1+x| + C$

Aplicar $e^{\ln} = 1$

$y = (1+x)K$

$\boxed{y = K(1+x)}$

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

$(\cos x)(e^{2y} - y)\frac{dy}{dx} = e^{y}\,\mathrm{Sen}\,2x$

Cond. iniciales $y(0) = 0$

$(\cos x)(e^{2y} - y)\,dy = e^{y}\,\mathrm{Sen}\,2x\,dx$

$\int \frac{e^{2y} - y}{e^{y}}\,dy = \int \frac{\mathrm{Sen}\,2x}{\cos x}\,dx$

$\mathrm{Sen}\,2x = 2\,\mathrm{Sen}\,x\,\cos x$

$\int \frac{e^{2y}}{e^{y}}\,dy - \int y e^{-y}\,dy = \int \frac{2\,\mathrm{Sen}\,x\,\cos x}{\cos x}\,dx$

$\int e^{y}\,dy - \int y e^{-y}\,dy = 2\int \mathrm{Sen}\,x\,dx$

$\boxed{e^{y} + e^{-y}(y+1) = -2\cos x + C}$

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{3x}\cdot e^{2y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{2y}} = e^{3x}\,dx$$

$$\int e^{-2y}\,dy = \int e^{3x}\,dx \qquad \ln(AB) = \ln A + \ln B$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = \frac{1}{3}e^{3x} + C \qquad \text{Aplicando } \ln.$$

$$\ln\left(-\tfrac{1}{2}\right) + \ln e^{-2y} = \ln\left[\tfrac{1}{3}e^{3x} + c\right]$$

$$-2y = \ln[\quad] - \ln\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{\ln\left[\frac{1}{3}e^{3x} + c\right] - \ln\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2}$$

13

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

$$\underbrace{x^2}_{2} + \underbrace{3xy}_{2} = 0 \qquad \text{Homogénea.}$$

$$\underbrace{x^2}_{2} + 3\underbrace{(x}_{1}+\underbrace{y)}_{1} = 0 \qquad \text{No homogénea}$$

$$3x + \sqrt{x^2+1} = 0 \qquad \text{Homogénea}$$

$$y' + \frac{M}{N} = 0 \qquad M(x,y)$$
$$N(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{M}{N} = 0$$

$$\boxed{N(x,y)\,dy + M(x,y)\,dx = 0}$$

14

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

Soluciones por sustitución

Ecuaciones homogéneas Si una función f posee la propiedad $f(tx, ty) = t^{\alpha}f(x, y)$ para algún número real α, entonces se dice que f es una **función homogénea** de grado α. Por ejemplo, $f(x, y) = x^3 + y^3$ es una función homogénea de grado 3 dado que

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f(x, y),$$

mientras que $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ es considerada no homogénea. Una ED de primer orden escrita en la forma diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad (1)$$

se dice que es **homogénea** si ambos coeficientes M y N son funciones homogéneas del *mismo* grado.

$$y = ux \text{ o } x = vy.$$

$$y = v \cdot x \quad ; \quad dy = v\,dx + x\,dv$$

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

$\underbrace{4xy}_{M}\, dx + \underbrace{(x^2+y^2)}_{N}\, dy = 0$

$x = vy$

$dx = v\,dy + y\,dv$

Sust.

$4(vy)y\,(v\,dy + y\,dv) + (\underbrace{(vy)^2}_{v^2y^2} + y^2)\,dy = 0$

$4v^2y^2\,dy + 4vy^3\,dv + v^2y^2\,dy + y^2\,dy = 0$

Agrupar las diferenciales (2 factorizaciones)

$4vy^3\,dv + (4v^2y^2 + v^2y^2 + y^2)\,dy = 0$

$y^3(4v\,dv) + y^2(5v^2+1)\,dy = 0$ (Sep. de Variables)

$\dfrac{4v}{5v^2+1}\,dv + \dfrac{y^2}{y^3}\,dy = 0$ (Integrar)

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

$$\int \frac{4v}{5v^2+1}\,dv + \int \frac{y^2}{y^3}\,dy = 0$$

$x = vy$

$\downarrow$

$v = \frac{x}{y}$

$u = 5v^2+1$

$du = 10v\,dv$

$$\int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{4}{10}\int \frac{du}{u} + \int \frac{dy}{y} = 0$$

$$\frac{2}{5}\ln|5v^2+1| + \ln|y| = 0$$

$$\boxed{\frac{2}{5}\ln\left|5\frac{x^2}{y^2}+1\right| + \ln|y| = 0}$$

17

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

EXAMEN: Resolver:

① $y' + 2xy^2 = 0$

② Verificar que $y = e^{3x}\cos 2x$ es solución de la ED.

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

Resolver $(xy)\,y' = y + \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad y' = \frac{dy}{dx}$

$$\underset{N}{xy\,dy} = (\underset{M}{y + \sqrt{x^2+y^2}})\,dx$$

$y = vx$

$dy = v\,dx + x\,dv$

Sust.

$$x(vx)(v\,dx + x\,dv) = (vx + \sqrt{x^2+v^2x^2})\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x^2(1+v^2)} = \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+v^2}$$
$$= x\sqrt{1+v^2}$$

$$v^2x^2\,dx + vx^3\,dv = vx\,dx + x\sqrt{1+v^2}\,dx$$

18

jueves, 16 de febrero de 2012 — UNITEC

$([redacted]^2 - v[redacted]\sqrt{1+v^2})\,dx + vx^3\,dv = 0$

$x(\underbrace{xv^2 - v - \sqrt{1+v^2}}\,)\,dx + v x^3\,dv = 0$

$$\int \frac{x}{x^3}\,dx + \int \frac{v\,dv}{xv^2 - v - \sqrt{1+v^2}} = 0$$ NO HAY SOL.

EJER $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$

$y = vx \longrightarrow v = \frac{y}{x}$

$dy = v\,dx + x\,dv$

$x\,dy = (y + \sqrt{x^2 + v^2x^2}\,)\,dx$

$x\,dy - vx\,dx - x\sqrt{1+v^2}\,dx = 0$

$xv\,dx + x^2\,dv - vx\,dx - x\sqrt{1+v^2}\,dx = 0$

$-x\sqrt{1+v^2}\,dx + x^2\,dv = 0$

$-\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = 0$; $-\ln x + \ln([redacted] + \sqrt{[redacted]+1}\,) = 0$

19

jueves, 16 de febrero de 2012 — UNITEC

(sustituciones diversas)

Reducción para separación de variables Una ecuación diferencial de la forma

$M\,dx + N\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

siempre se puede reducir a una ecuación con variables separables mediante sustitución $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$.

1. Identificar $f(ax+by+c)$ $\begin{cases} \text{Sen}(x+y) \\ (3x-2y)\,dx + (3x-2y+2)\,dy = 0 \end{cases}$
2. Aplicar $z = ax + by + c$
3. Se deriva dz/dx (Implícita)
4. de (3) se despeja dy/dx
5. Se sustituye z y dy/dx en la EDO
6. Se aplica una separación de variables
7. Se regresan las variables originales

20

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

Resuelve

$y' = \operatorname{Sen}(x+y)$; $\frac{dy}{dx} = \operatorname{Sen}(x+y)$

① $z = x+y$

②③ $\frac{dz}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx}$

④ $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

⑤ $\frac{dz}{dx} - 1 = \operatorname{Sen}(z)$

⑥ $\frac{dz}{dx} = \operatorname{Sen}(z) + 1$

$$\frac{dz}{\operatorname{Sen}(z)+1} = dx$$

Integrar

$$\int \frac{du}{\operatorname{Sen} u + a} = \tan \frac{u}{a} - \sec \frac{u}{a}$$

$$\tan z - \sec z = x + K$$

$$\boxed{\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + K}$$

21

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

Resuelve $(3x-2y)dx - (3x-2y+2)dy = 0$

$z = 3x-2y$

$\frac{dz}{dx} = 3 - 2\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx} - 3}{-2}$

$dy = \frac{dz}{-2} - \frac{3dx}{-2}$

$z\,dx - [z+2]\left[-\frac{dz}{2} + \frac{3}{2}dx\right] = 0$

$z\,dx - \left[-\frac{z\,dz}{2} + \frac{3}{2}z\,dx - dz + 3\,dx\right] = 0$

$z\,dx + \frac{z}{2}dz - \frac{3}{2}z\,dx + dz - 3dx = 0$

$\left(-\frac{1}{2}z - 3\right)dx + \left(\frac{z}{2} + 1\right)dz = 0$

$(-z-6)\,dx + (z+2)\,dz = 0$

$\int dx - \int \frac{z+2}{z+6}\,dz = 0$

VIERNES
⑩ 2º Parc.

$x - [z + 4\ln(z+6)] = K$

$\boxed{x - [(3x-2y) + 4\ln(3x-2y+6)] = K}$

22

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

DEFINICIÓN 2.3 Ecuación exacta

Una expresión diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es una **diferencial exacta** en una región R del plano xy si corresponde al diferencial de alguna función $f(x, y)$. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es una **ecuación exacta** si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$\int M dx = \frac{5x^2}{2} + 4xy$

$\int N dy = 4xy - \frac{8y^4}{4}$

Juntar $\int M\,dx$ y $\int N\,dy$

$(5x+4y)\,dx + (4x-8y^3)\,dy$

$\frac{M}{\partial y} = 4 \qquad \frac{N}{\partial x} = 4$

$\boxed{\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = K}$

jueves, 16 de febrero de 2012

UNITEC

Resolver

$(x^3+y^3)\,dx - 3xy^2\,dy = 0$

NO ES EXACTA

$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$

$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = K.$

Ecuaciones diferenciales LINEALES de 1er orden

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = f(x)}$$

Ejemplo.

$x^2 y' + 5y = x$

$y' + \frac{5}{x^2} y = \frac{1}{x}$ $\quad P(x) = \frac{5}{x^2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo

$x^3 \frac{dy}{dx} + (2 - 3x^2)y = x^3$

$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right)y = 1$ $\quad P(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$

$f(x) = 1$

DEFINICIÓN 2.2 Ecuación lineal

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x).$$

$$\mu = e^{\int p(x)dx}$$

$$y = \frac{\int \mu \cdot f(x) \cdot dx}{\mu} + \frac{c}{\mu}$$

jueves, 16 de febrero de 2012 **UNITEC**

Résolver $x^3\frac{dy}{dx}+(2-3x^2)y=x^3$ factor integrante

Dividiendo entre x^3

$y'+\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}\right)y=1$

$f(x)=1$

$P(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}$

$\int P(x)dx=\int 2x^{-3}dx-\int\frac{3}{x}dx=-\frac{1}{x^2}-3\ln x=-\frac{1}{x^2}-\ln x^3$

$\mu=e^{\int P(x)}=\underline{e^{-1/x^2-\ln x^3}}=\underline{e^{-1/x^2}\cdot e^{-\ln x^3}}=x^3e^{1/x^2}$

$y=\frac{\int\mu f(x)dx}{\mu}+\frac{c}{\mu}$

$\int\mu f(x)\,dx=\int x^3e^{1/x^2}\,dx$ $\Big\}$ Por partes $u=e^{1/x^2}$ $du=-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}$ $dv=x^3$ $v=\frac{x^4}{4}$

$uv-\int v\,du=e^{1/x^2}\frac{x^4}{4}-\int\frac{x^4}{4}\left(-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}\right)dx$ .....

27

jueves, 16 de febrero de 2012 **UNITEC**

Ecuación de Bernoulli La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^n, \tag{4}$$

donde n es cualquier número real, se llama **ecuación de Bernoulli**. Observe que para $n=0$ y $n=1$, la ecuación (4) es lineal. Para $n\neq 0$ y $n\neq 1$, la sustitución $u=y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de la forma (4) a una ecuación lineal.

$3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2}$

P1 Modificar la ED $\Rightarrow$ Bernoulli

⊕ Dividiendo entre $3x$ y hallando y^n

$y'-\frac{2}{3x}y=\frac{1}{3}x^2y^{-2}$

$y^n=y^{-2}$

P2 Eliminar y^n por división

$y^2y'-\frac{2}{3x}y^3=\frac{1}{3}x^2$

P3 Cambio de variable

$z=y^3$ derivar

$z'=3y^2y'$

28

P2 $y^2y' - \frac{2}{3x}y^3 = \frac{x^2}{3}$

P3 $z = y^3$

$z' = 3y^2y' \Rightarrow \frac{z'}{3} = y^2y'$

P4 Sustituir P3 en P2

$\frac{z'}{3} - \frac{2}{3x}z = \frac{x^2}{3}$ } P5 Se resuelve por factor integrante

multiplicar (3)

$z' - \frac{2}{x}z = x^2$

$P(x) = -\frac{2}{x}$ $\quad f(x) = x^2$

$\int p(x) = -2\,Ln|x| = Ln\,x^{-2}$

$\mu = e^{\int P(x)} = e^{Ln\,x^{-2}} = x^{-2}$

$z = \frac{\int \mu f(x)\,dx}{\mu} + \frac{c}{\mu}$

jueves, 16 de febrero de 2012
UNITEC

$\int \mu f(x)\,dx = \int x^{-2}\,x^2\,dx = x$

$z = \frac{x}{x^{-2}} + \frac{c}{x^{-2}} = x^3 + cx^2$

$z = y^3$

$\boxed{y^3 = x^3 + cx^2}$